

LP4 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

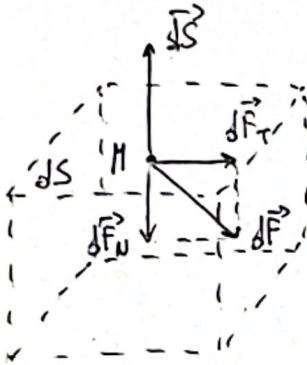
Écoulement d'un fluide parfait

Forces de contact

Soit un élm^t de fluide à l'intérieur d'un fluide quelconque ; les particules du fluide à l'ext^é de l'élm^t exercent sur lui des forces de contact.

On note $d\vec{F}$ la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface dS de l'élm^t de fluide.

Cas général : $d\vec{F}$ possède une composante normale à $dS \rightarrow d\vec{F}_N$ et une composante tangentielle $\rightarrow d\vec{F}_T$
 $\rightarrow d\vec{F} = d\vec{F}_N + d\vec{F}_T$



$d\vec{F}_N$: force élémentaire de pression. Si P fluide en M
 $= P(M, t)$, alors $d\vec{F}_N = -P(M, t) \cdot d\vec{S}$

Elle est dirigée vers l'intérieur de l'élm^t de fluide.
On peut montrer que le travail total des forces de pression à l'intérieur de l'élm^t est nul
 $\rightarrow$ forces de pression $\leftrightarrow$ ne dissipent pas d'énergie.

$d\vec{F}_T$: force élémentaire de viscosité $\leftrightarrow$ force de cisaillement $\leftrightarrow$ caractéristique des fluides réels visqueux. Si les particules ext^é à l'élm^t de fluide ont une vitesse $>$ particules à l'intérieur de l'élm^t $\rightarrow$ elles vont entraîner les particules à l'intérieur de l'élm^t dans leur mouvement $\rightarrow d\vec{F}_T$ modélise un frot de qte de movt.

NB : Statique des fluides $\leftrightarrow$ étude des forces de pression.

NB : à l'intérieur du fluide, les forces de cisaillement s'opposent aux def. des élm^t de fluide ; à la surface de l'élm^t de fluide considéré, la force de cisaillement s'oppose au déplacement de cet élm^t p/r reste du fluide $\rightarrow$ travail des forces de viscosité dans le fluide $\leq 0 \rightarrow$ il y a dissipation d'énergie $\leftrightarrow$ on appelle parfois ces forces des forces de frottement.

NB : il existe aussi des forces de tension superficielles à l'interface entre deux fluides $\neq$. En effet, surface $\leftrightarrow$ plus d'isotropie du milieu $\rightarrow$ les particules sont attirées vers le cœur du fluide par les autres particules $\rightarrow$ minimisation de la surface libre.

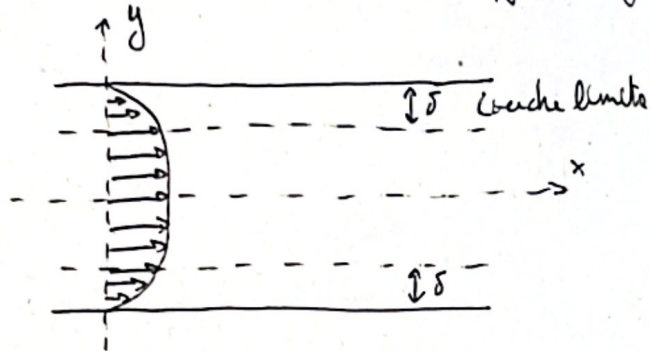
$\rightarrow$ pour dS de dS , il faut exercer une force qui s'oppose à la tension superf. et dont le travail $\delta W = \gamma \cdot dS \leftrightarrow \gamma =$ coefficient de tension superficielle (N/m) caractéristique des deux fluides (ie interfaces) en contact.

Écoulement parfait; réalité

Écoulement d'un fluide: parfait $\leftrightarrow$ forces de viscosité nulles.

$\rightarrow$ forces de contact se réduisent aux forces de pression $\rightarrow$ pas de dissipation d'énergie dans le fluide en mouvement.

NB: cette situation est un cas limite de l'écoulement réel. En effet, aux interfaces, par exemple au contact d'un solide, même un fluide de très faible viscosité a une vitesse nulle aux bords $\leftrightarrow$ l'écoulement n'est pas pft car $\exists$ forces de frottement entre le fluide et le solide.



Soient deux plaques // entre lesquelles s'écoule un fluide réel en régime perm $\rightarrow$ loin des parois, la vitesse du fluide ne dépend pas / peu des variables d'espace.

Près des parois, cette vitesse v et s'annule aux parois (no-slip) $\rightarrow$ déf de 2 zones:

- Zone centrale, où $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_x$ avec $v = \text{cst}$. Dans cette zone, le profil des vitesses d'un fluide pft serait $\approx$ le m que celui d'un fluide pft.
- Zone périph, où $\vec{v} = v(y) \cdot \vec{e}_x$; couche limite (théorie de Prandtl). L'épaisseur δ de la CL est variable et dépend de la vitesse du fluide mais aussi de sa viscosité, de sa masse vol. et des dim. caract de la conduite.

Dans cette zone, le profil des vitesses d'un fluide pft serait $\neq$ p/r fluide réel: la vitesse du fluide pft aux parois serait non-nulle et tte aux parois.

$\rightarrow$ Écoulement $\approx$ pft dans la zone centrale, en dehors de la CL.

Equation d'Euler

Un élmnt de fluide de volume $d\tau$ et de masse dm est soumis à deux types de forces:

- les forces volumiques, qui s'appliquent à toutes les particules de l'élmnt de fluide:

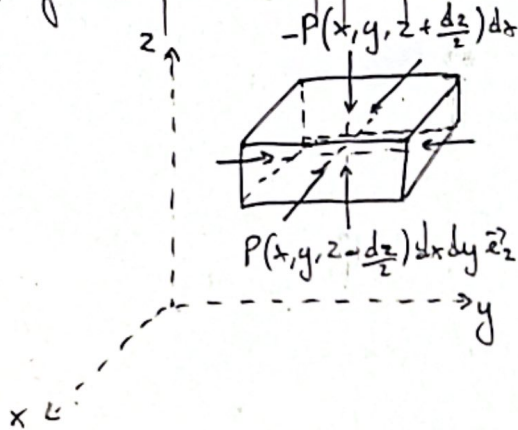
$$d\vec{F} = \vec{f}_v d\tau, \text{ où } \vec{f}_v \text{ est la repr. vol. de ces forces.}$$

NB: en notant $\mu = \frac{dm}{d\tau}$ la masse vol du fluide, on peut aussi écrire:

$$d\vec{F} = \vec{f}_m dm = \vec{f}_m \frac{dm}{\mu}, \text{ où } \vec{f}_m \text{ est la représentation massique de ces forces.}$$

NB: ainsi, pour les forces de pesanteur: $\vec{f}_v = \mu \cdot \vec{g}$ et $\vec{f}_m = \vec{g}$.

- les forces de contact, qui se réduisent aux forces de pression dans le cas d'un écoulement pft.
- on cherche à déterminer $d\vec{F}_p$, la résultante des forces qui s'exercent sur un élmt de fluide parallélépipédique de côtés dx, dy et dz .



la composante de $d\vec{F}_p$ suivant l'axe Oz s'écrit:

$$dF_{pz} = P(x, y, z - \frac{dz}{2}) dx dy - P(x, y, z + \frac{dz}{2}) dx dy \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz$$

De m, suivant Ox et Oy :

$$dF_{px} = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \text{ et } dF_{py} = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz$$

$$\rightarrow d\vec{F}_p = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}, -\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial z}\right) dz \text{ ou } \text{grad } P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right) \text{ par } dz$$

$$\hookrightarrow d\vec{F}_p = -\text{grad } P \cdot dz$$

et les équivalents vol. et massiques des forces de pression sont: $\int_{Pv} = -\text{grad } P$
 $\int_{Pm} = -\frac{\text{grad } P}{\rho}$

On applique ensuite le TRC, ou principe fondamental de la dyn, à l'élmt de fluide de volume dz et de masse $dm \rightarrow$ on obtient l'éq d'Euler:

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F} + d\vec{F}_p \quad \text{où } \frac{D\vec{v}}{Dt} \text{ est la dérivée particulière de la vitesse de l'élmt de fluide.}$$

$$\text{et } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

on note, pour rappel, $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ l'opérateur advection: $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad \text{avec } \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\text{et l'éq d'Euler s'écrit: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{d\vec{F}}{dm} + \frac{d\vec{F}_p}{dm} \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\text{grad } P}{\rho}$$

ou, d'après la formulation de Lamb: $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$

$$\rightarrow \text{Euler: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\text{grad } P}{\rho}$$

$$\text{puit s'écrire: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \otimes \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\text{grad } P}{\rho}$$

Ainsi, les grandeurs inconnues sont $\vec{v}(M, t)$, la pression $P(M, t)$ et le mass volum $\rho(M, t)$, soit 5 inconnues scalaires $\rightarrow$ résolution nécessite 5 eq. scalaires.

Trois de ces relations scalaires sont données par l'éq. Euler vectorielle, une par la relation de conservation de la masse, et une par une eq. d'état.

Mais l'eq. d'état introduit la température $T(M, t)$, grandeur inconnue suppl $\rightarrow$ on a besoin d'une 6ème rel. scalaire $\leftrightarrow$ loi d'écoulement thermo, p.ex. isotherme, incompressible ou adiabatique.

Relations de Bernoulli

Ces f.p.p.: les forces massiques $\vec{f}_m$ dérivent d'une E.p.p. massique $e_{pm} \rightarrow \vec{f}_m = -\vec{\text{grad}} e_{pm}$;
et pour les forces de pesanteur: $e_{pm} = gz$.

Écoulement stationnaire

Écoulement stationnaire $\leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \rightarrow$ Euler: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\vec{\omega} \otimes \vec{v}) \otimes \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\vec{\text{grad}} P}{\rho}$

s'écrit: $\vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\vec{\omega} \otimes \vec{v}) \otimes \vec{v} - \vec{f}_m + \frac{\vec{\text{grad}} P}{\rho} = \vec{0}$ avec $\vec{f}_m = -\vec{\text{grad}} e_{pm}$

$$\rightarrow \vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) + (\vec{\omega} \otimes \vec{v}) \otimes \vec{v} + \frac{\vec{\text{grad}} P}{\rho} = \vec{0}$$

le déplacement elem. $d\vec{OH} = \vec{v} \cdot dt$ multiplie scalairement les 2 membres (le long d'une ligne de courant):

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) \cdot d\vec{OH} + ((\vec{\omega} \otimes \vec{v}) \otimes \vec{v}) \cdot d\vec{OH} + \frac{\vec{\text{grad}} P \cdot d\vec{OH}}{\rho} = \vec{0}$$

or, le produit mixte $\vec{a} \cdot (\vec{b} \otimes \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \otimes \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b})$

$$\rightarrow \text{ici, } ((\vec{\omega} \otimes \vec{v}) \otimes \vec{v}) \cdot d\vec{OH} = \vec{\omega} \otimes \vec{v} \cdot (\vec{v} \otimes d\vec{OH}) = \vec{0}$$

alignés $\rightarrow = \vec{0}$

$$\text{Euler s'écrit donc: } \vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) \cdot d\vec{OH} + \frac{\vec{\text{grad}} P \cdot d\vec{OH}}{\rho} = \vec{0} \Leftrightarrow \rho \vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) \cdot d\vec{OH} + \vec{\text{grad}} P \cdot d\vec{OH} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \rho \vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) + \vec{\text{grad}} P = \vec{0} \text{ ou } d \left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) + \frac{dP}{\rho} = 0$$

et après intégration le long d'une ligne de courant: $\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \int \frac{dP}{\rho} = \text{cte}$

qui est la forme générale de la relation de Bernoulli, avec souvent $e_{pm} = gz$

On fait ensuite deux hypothèses sur le fluide :

- le fluide est barotrope ie $\mu = \mu(P) \rightarrow \int \frac{dP}{\mu(P)}$ ne dépend que de $P \rightarrow \int \frac{dP}{\mu(P)} = \varphi(P)$

→ Bernoulli : $\frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + \varphi(P) = \text{cte}$

- le fluide est incompressible et homogène $\rightarrow \varphi(P) = \varphi = \frac{P}{\mu}$

→ Bernoulli : $\frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + \frac{P}{\mu} = \text{cte}$

Enfin, si H = enthalpie du fluide, U son énergie interne, P la pression, V son volume et m la masse $\rightarrow dH = VdP + TdS$, avec S l'entropie, et la var. infinitésimale d'enthalpie massique h est : $dh = \frac{V}{m} dP + \frac{T}{m} dS$

→ pour un écoulement isentropique ($dS=0$) : $dh = \frac{V}{m} dP \Leftrightarrow dh = \frac{dP}{\mu}$

→ Bernoulli : $\frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + h = \text{cte}$
(ligne de courant)

Écoulement irrotationnel

Écoulement irrotationnel : $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \exists$ une fct scalaire ϕ tq $\vec{v} = \vec{\text{grad}} \phi$

→ Euler : $\vec{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} \right) + \frac{\vec{\text{grad}} P}{\mu} = \vec{0}$

Avec fluide barotrope : $\mu = \mu(P) \rightarrow \varphi(P) \rightarrow \vec{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial P} \vec{\text{grad}} P = \frac{\vec{\text{grad}} P}{\mu(P)}$

→ Euler : $\vec{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + \varphi(P) \right) = \vec{0} \rightarrow$ on peut intégrer $\rightarrow$ Bernoulli

dans tout le fluide : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + \varphi(P) = \text{cte}(t)$

si fluide incompressible et homogène : $\mu = \text{cte}$ et $\varphi = \frac{P}{\mu}$

→ Bernoulli dans tout le fluide : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + \frac{P}{\mu} = \text{cte}(t)$

NB : si écoulement stat : $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + \frac{P}{\mu} = \text{cte}$

Interprétation

Ainsi, dans le cas le plus simple : écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide

incompressible et homogène ; Bernoulli dans tout le fluide : $\frac{v^2}{2} + \rho_{\text{fm}} + \frac{P}{\mu} = \text{cte}$

NB : cette relation traduit la conservation de l'énergie mécanique dans un écoulement pft.

En effet : $\frac{v^2}{2}$ est l'énergie cinétique massique du fluide

• $\frac{P}{\rho}$ est l'énergie potentielle massique associée aux forces massiques de pression $\vec{f}_{pm} = -\text{grad}\left(\frac{P}{\rho}\right)$

• e_{pm} est l'énergie pot. massique associée aux autres forces que les forces de pression $\vec{f}_m = -\text{grad } e_{pm}$

NB: Bernoulli peut aussi s'écrire: $\rho \frac{v^2}{2} + \rho e_{pm} + P = \text{cte}$, où

• $\rho \frac{v^2}{2}$ est homogène à une pression: c'est la pression dynamique

• $\rho e_{pm} + P$ est la pression statique

et la somme de ces deux pressions est la pression totale $\rightarrow$ Bernoulli exprime le fait que cette pression est constante.

Applications

le cadre simple de Bernoulli (stat, irrotationnel, incompressible) est contraignant $\rightarrow$ question: peut-on l'appliquer à un fluide faiblement compressible tq $\Delta\rho \ll \rho$.

Coef de compressibilité isentropique du fluide: $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta P}$

comme $\Delta\rho \ll \rho \rightarrow \chi \cdot \Delta P = \frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$

Entre 2 pts du fluide, l'un où v est max et p min, l'autre où v est min et p max $\rightarrow$ on applique Bernoulli, en supposant que l'énergie pot massique e_{pm} ne varie pas entre ces deux pts $\rightarrow \frac{v_{\max}^2}{2} + e_{pm} + \frac{P_{\min}}{\rho} = \frac{v_{\min}^2}{2} + e_{pm} + \frac{P_{\max}}{\rho}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(v_{\max}^2 - v_{\min}^2) = \frac{1}{\rho}(P_{\max} - P_{\min}) \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\Delta P}{\rho}$$

Reprend: $\chi \Delta P = \frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1 \rightarrow \chi \rho \cdot \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = \chi \rho \frac{\Delta P}{\rho} = \chi \Delta P \ll 1$

$$\Leftrightarrow \chi \rho \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) \ll 1$$

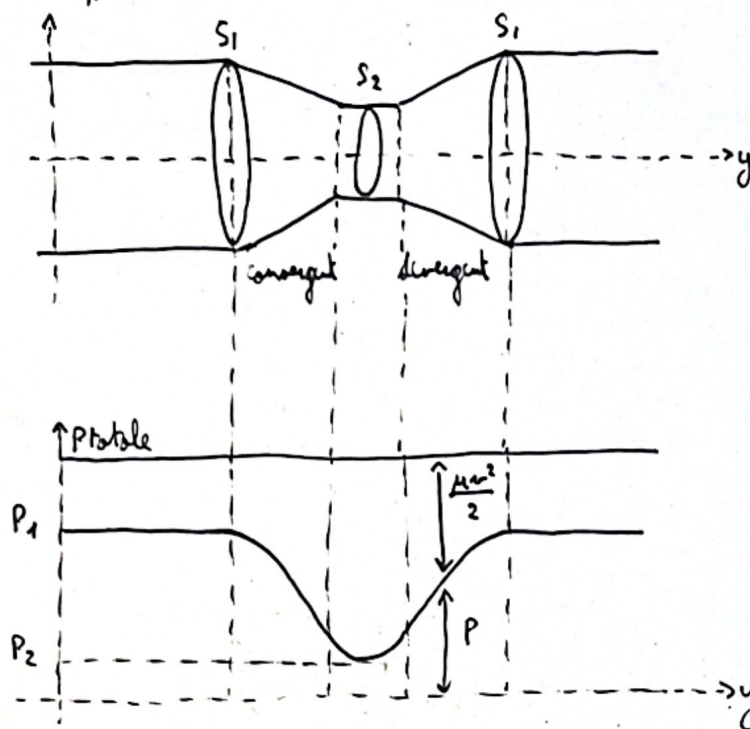
Or, vit des ondes acoustiques dans les fluides est $c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho}}$. En supposant $v_{\min} = 0$

$\rightarrow$ condition: $\chi \rho \frac{v_{\max}^2}{2} \ll 1 \Leftrightarrow v_{\max}^2 \ll \frac{2}{\chi \rho} \xrightarrow{\sqrt{\chi \rho}} v_{\max} \ll \sqrt{2} \cdot c$
 $\Leftrightarrow v_{\max} \ll c$

$\rightarrow$ on peut appliquer Bernoulli à un écoulement stat et irrot. à un fluide compr. si $v_{\max} \ll c$

Effet Venturi

Principe de l'effet Venturi



Soit un fluide homogène et incompressible en écoulement stationnaire et irrotationnel dans un tube de Venturi, c'est une conduite dont la section $\downarrow$ (convergent) puis $\uparrow$ (divergent).

Cette conduite a une sym. de révolution autour de l'axe Oy ; on suppose le fluide uniforme dans une section droite de la conduite.

→ conservation du débit entre S_1 et S_2 : $v_1 S_1 = v_2 S_2 \rightarrow$ en appliquant Bernoulli entre S_1 et S_2 , avec $z_1 = z_2$, on a: $\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$, avec $z_1 = z_2$

$$\rightarrow \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} \text{ et } \frac{P_2}{\rho} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_2 = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right) \text{ ou, par cons. du débit: } P_2 = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

NB: $S_1 > S_2 \rightarrow P_2 > P_1$ et $v_1 < v_2 \rightarrow$ dans les régions de faible section, le fluide s'écoule plus vite et la pression est plus faible que dans les régions de grande section $\rightarrow$ effet Venturi.

Expériences

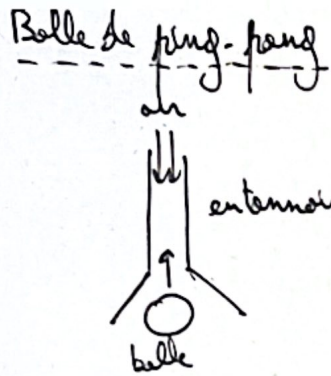
Feuille de papier

● Flux d'air horizontal, par dessus une feuille de papier $\rightarrow v_{dessus} > v_{dessous} \rightarrow \neq$ de pression: $P_{dessus} < P_{dessous} \rightarrow$ la feuille se soulève

Applications: - ailes d'avion

- effet de sol des voitures de course (via l'alleron: $v_{dessus} < v_{dessous}$)

(4)



Entre l'entonnoir et la balle, v est importante car la section est faible $\rightarrow$ dépression qui aspire la balle dans l'entonnoir, à l'inverse du débit d'air!

Mesure d'un débit avec un tube de Venturi

On isole v_1 dans l'éq de Venturi: $v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\mu(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1)}}$ $\rightarrow$ pour obtenir v_1 , et donc le

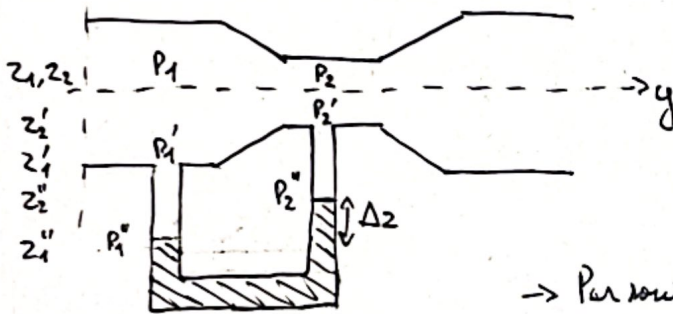
débit volumique $D_v = v_1 S_1 \rightarrow$

il suffit de déterminer la $\Delta P = P_1 - P_2$. On utilise un tube en U rempli d'un fluide de masse volumique $\mu_0 \rightarrow$ Dans le tube en U, le fluide est en éq. stat (pas de P dynamique)

$\rightarrow$ Bernoulli dans le U:

$$P_1'' - P_1' = \mu g (z_1' - z_1'')$$

$$\text{et } P_2'' - P_2' = \mu g (z_2' - z_2'')$$



$$\rightarrow \text{Par soustraction: } P_1'' - P_1' - P_2'' + P_2' = \mu g [z_1' - z_1'' - (z_2' - z_2'')]$$

De plus, dans le tube en U, $P_1'' - P_2'' = \mu_0 g \Delta z = \mu_0 g (z_2'' - z_1'')$

$$\text{Donc: } \mu_0 g (z_2'' - z_1'') - P_1' + P_2' = \mu g [z_1' - z_1'' - (z_2' - z_2'')] = \mu g (z_2'' - z_1'' + z_1' - z_2')$$

$$\Leftrightarrow -P_1' + P_2' = \mu g (z_2'' - z_1'') - \mu_0 g (z_2'' - z_1'') + \mu g (z_1' - z_2')$$

$$\Leftrightarrow P_1' - P_2' = \underbrace{(\mu_0 - \mu) g (z_2'' - z_1'')}_{= \Delta z} - \mu g (z_1' - z_2') \quad (I)$$

Par ailleurs, dans le tube Venturi, on applique Bernoulli sur l'axe: $\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu}$

$$\text{et au bord du tube: } \frac{v_1'^2}{2} + g z_1' + \frac{P_1'}{\mu} = \frac{v_2'^2}{2} + g z_2' + \frac{P_2'}{\mu}$$

On suppose $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2' \rightarrow$ on soustrait les 2 eq dans le tube de Venturi:

$$g z_1' + \frac{P_1'}{\mu} - \frac{P_1}{\mu} = g z_2' + \frac{P_2'}{\mu} - \frac{P_2}{\mu} \Leftrightarrow P_1' - P_2' = P_1 - P_2 - \mu g (z_1' - z_2') \quad (II)$$

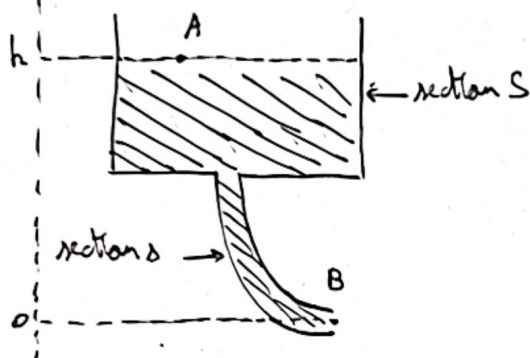
$$\text{On combine (I) et (II): } (\mu_0 - \mu) g \Delta z - \mu g (z_1' - z_2') = P_1 - P_2 - \mu g (z_1' - z_2')$$

$$\Leftrightarrow P_1 - P_2 = (\mu_0 - \mu) g \cdot \Delta z \rightarrow \text{Debit vol: } D_v = S_1 \cdot v_1 = S_1 \cdot \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\mu \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

$$\Leftrightarrow D_v = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{2(\mu_0 - \mu)}{\mu} g \Delta z}$$

Vidange d'un réservoir; formule de Torricelli

Soit un réservoir de section S , contenant un fluide homogène et incompressible. Un tube de vidange de longueur L et de section $s \ll S$, raccourdi au fond du réservoir, permet d'évacuer le fluide. $z \uparrow$



On cherche à déterminer la vitesse d'écoulement du fluide v_B en B.

Écoulement laminaire

Soit, dans un 1^{er} temps, un écoulement pft stationnaire $\rightarrow$ entre les pts A et B d'une ligne de courant, Bernoulli s'écrit $\rightarrow \frac{v_A^2}{2} + g z_A + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + g z_B + \frac{P_B}{\mu}$

Or, lorsque le fluide s'écoule: $P_A = P_B$, avec $z_B = 0 \rightarrow \frac{v_A^2}{2} + g h = \frac{v_B^2}{2}$

On suppose $v_A \ll v_B \rightarrow v_B^2 - v_A^2 = 2gh \stackrel{a}{\approx} v_B^2 = 2gh$ ou $v_B = \sqrt{2gh}$ Formule de Torricelli
soit $v_A \approx 0$

Écoulement en régime non-stationnaire

En $t=0$, le fluide commence à s'écouler du pt B; on cherche l'évolution de $v_B(t)$

On repart d'Euler: $\vec{\int}_m = -\vec{\text{grad}}(gz) \rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu}\right) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{0}$

On projette sur le vect élém élémentaire $d\vec{OH} = \vec{v} dt$ et on intègre le long d'une ligne de courant entre A et B $\rightarrow \int_A^B \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{OH} + \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu}\right) \cdot d\vec{OH} \right] = 0$

avec $P_A = P_B$ (écoulement), $v_B \gg v_A$ (car $S \gg s$) et $v_A S = v_B s$:

$$\rightarrow \int_A^B \left(\frac{\partial v}{\partial t} d\vec{OH} + \frac{v_B^2}{2} - gh \right) = 0$$

De plus, avec les hypotheses précédentes, on peut considérer que l'écoulement du fluide dans le réservoir est négligeable $r/r \ll 1$ son écoulement dans le tube de vidange et module la vitesse du fluide dans le tube de vidange = uniforme. On note $v_0 = v$

$$\rightarrow L \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} - gh = 0 \text{ avec } v_\infty = \sqrt{2gh} \text{ donnée par Torricelli}$$

$$\Leftrightarrow L \frac{dv}{dt} = gh - \frac{v^2}{2} = \frac{2gh - v^2}{2} = \frac{v_\infty^2 - v^2}{2} \Leftrightarrow \frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{dt}{2L}$$

$$\text{On intègre en notant que } \frac{2dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{v_\infty} \left(\frac{dv}{v_\infty - v} + \frac{dv}{v_\infty + v} \right) \text{ et } v(t=0) = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{v_\infty} \int \left(\frac{dv}{v_\infty - v} + \frac{dv}{v_\infty + v} \right); \text{ on pose } u = v_\infty - v \text{ et } w = v_\infty + v$$

$$\Leftrightarrow du = -dv \quad dw = dv$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_\infty} \int \left(-\frac{du}{u} + \frac{dw}{w} \right) = \frac{1}{v_\infty} (\ln w - \ln u) = \frac{1}{v_\infty} \ln \frac{w}{u} = \frac{t}{L}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{w}{u} = \frac{v_\infty}{L} \cdot t \Leftrightarrow \ln \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} = \frac{v_\infty}{L} \cdot t \Leftrightarrow \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} = e^{\frac{v_\infty}{L} t}$$

$$\text{ Bref, on obtient : } v_0 = v = v_\infty \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \text{ avec } T = \frac{2L}{v_\infty} \dots$$

Autres applications

- Tube de Pitot
- Tube de Prandtl