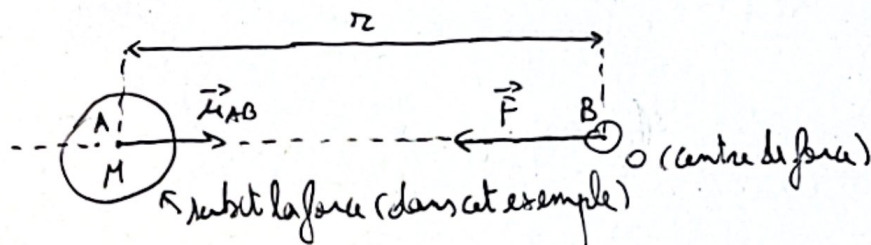


LP1: Gravitation

- Force gravitationnelle: force centrale conservative, varie en $\frac{1}{r^2}$.

Expression de la force gravitationnelle

$$\vec{F} = -G \frac{m_0 m_H}{r^2} \vec{u}_{AB} \text{ ou } \vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_{AB} \text{ avec } K = -G m_0 m_H < 0$$



Définition

- Force centrale: force qui s'écrit $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.

- Indépendante du temps;
- Ne dépend que de la distance r , la distance de M à O ;
- Droite d'action: même direction que $\vec{OM}$.

NB: force conservative $\leftrightarrow$ le calcul de son travail ne dépend pas du chemin suivi.
 → dérive d'une E_{pot} :

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p \rightarrow F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

et avec K défini ci-dessus, on a:

$$\frac{K}{r^2} = -\frac{dE_p}{dr} \Leftrightarrow dE_p = -K \frac{dr}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow E_p = \frac{K}{r} + \text{cte} \text{ où } E_p(r \rightarrow \infty) = 0 \rightarrow \text{définit iste. souvent}$$

Moment cinétique

Point M : soumis qu'à une force centrale $\rightarrow$ moment cinétique constant

On applique le théorème du moment cinétique en O dans la réf. galiléenne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Rappel: moment cinétique (ou angulaire) d'un pt mat M p/r à un pt O est le moment de la q'té de mov $\vec{p}$ p/r à O , i.e le produit vekt $\vec{L}_O = \vec{OM} \otimes \vec{p}$

$$\text{et si } \vec{OM} = \vec{r}, \text{ on a } \vec{L}_O = \vec{r} \otimes \vec{p} = \vec{r} \otimes m\vec{v} \text{ avec } \vec{p} = m\vec{v}$$

théorème: $\vec{L}_r = \vec{r} \otimes \vec{p}$ avec $\vec{F}$ la force centrale s'appliquant sur M en $\vec{r}$
 → moment de la force: $\vec{M}_r = \vec{r} \otimes \vec{F}$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{L}_r) = \vec{M}_r$$

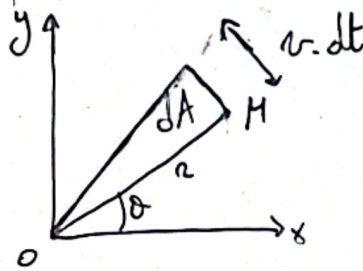
(1)

Ici, $\frac{d\vec{L}_O(H)}{dt} = \vec{H}_O(\vec{F}) = \vec{OH} \otimes \vec{F} = 2 \cdot \vec{e}_r \otimes \vec{F}(r) \cdot \vec{e}_r = \vec{0} \rightarrow \vec{L}_O(H) \text{ constant}$
 linéaire

→ 2 conséquences: 1. le mot de H est plan. En effet, $\vec{L}_O(H) = \vec{OH} \otimes \vec{v} = m \cdot \vec{OH} \otimes \vec{v}$
 = cste

→ le pt H se déplace constamment dans un plan $\perp$ à $\vec{L}_O(H)$
 (plan défini par $\vec{OH}$ et $\vec{v}$)

2. L'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{OH}$ est proportionnelle au temps: loi des aires



Soit $\vec{L}_O(H)$ en coord. polaires / cylindriques

$$\vec{L}_O(H) = m \cdot \vec{OH} \otimes \vec{v}(H) = m \cdot r \vec{e}_r \otimes (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$$

$$= m \cdot r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \quad \text{car } \vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$$

et on note $\vec{L}_O(H) = m C \vec{e}_z$, avec $C = r^2 \dot{\theta}$ (constante des aires)

→ aire balayée par le rayon vecteur pnt dt:

$$dA = \frac{1}{2} OH \cdot v dt = \frac{1}{2} r \cdot r \dot{\theta} dt$$

$$\Leftrightarrow dA = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt \quad \text{et} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}$$

vitesse angulaire $\Leftrightarrow$ vitesse de balayage linéaire.

$$\Leftrightarrow A(t) = \frac{C}{2} t + \text{cste} \quad (A \text{ prop } t)$$

Conservation de l'énergie mécanique

Force centrale: conservative $\Leftrightarrow$ Éméc du pt H conservée au cours du mot.

En effet, théorème de l'énergie cin, pour H entre A et B:

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F}). \text{ Or } \vec{F} \text{ conservative:}$$

$$\rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$$

En effet, $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B F(r) dr = \int_A^B \frac{K}{r^2} dr = \left[-\frac{K}{r} \right]_A^B = -(E_p(B) - E_p(A))$ (voir Def)
 $= E_p(A) - E_p(B)$

→ en deux pos quelconques A et B de M: $E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = \text{cte}$

→ $E_M = E_c + E_p = \text{cte}$

Rem: si E_M cste → elle a à tout instant la val à l'instant initial → on peut déterminer sa valeur apr CI.

Définition d'une E pot effective

$E_M = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r)$, avec $E_p(r) = \frac{K}{r} + \text{cte}$ et, en exprimant v en

coord. pol: $E_M = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{K}{r} + \text{cte}$

En effet, $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \rightarrow \vec{v}^2 = \underbrace{\dot{r}^2 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} + r^2 \underbrace{\dot{\theta}^2 \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta}_{=1} + 2 \dot{r} r \dot{\theta} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta}_{=0}$

et $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$

et si on fait apparaître C la cte des aires: $E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{K}{r} + \text{cte}$

avec $C = r^2 \dot{\theta} \leftarrow C' = r^4 \dot{\theta}^2 \rightarrow E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C'^2}{r^2} + \frac{K}{r} + \text{cte}$

$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m C'^2}{2 r^2} + \frac{K}{r} + \text{cte}$

→ $E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{peff}}(r)$

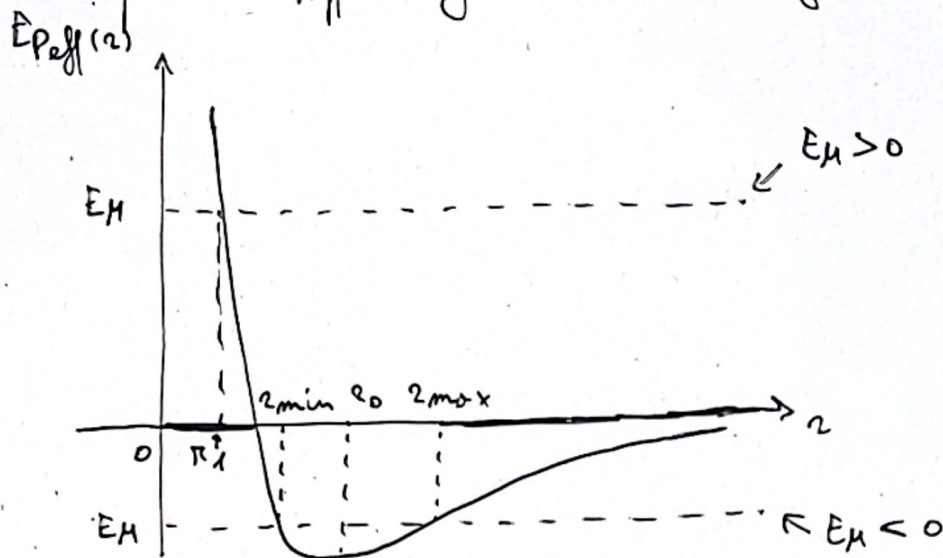
$E_{\text{peff}}(r) = E_p(r) + \frac{m C'^2}{2 r^2}$

$E_{\text{peff}}(r)$ est appelée énergie pot. effective, elle comprend $E_p(r)$ et une partie de l' E_c de M
 → le pb se ramène à l'étude d'un pt mat de masse m dont la pos n'est décrite que par r , et soumis à une force conservative dont l'E pot est E_{peff} .

NB: E_{peff} va permettre de trouver les formes de mot possibles pour M en fct du signe de K et de la valeur de la cste E_M .

Étude des mouvements possibles et conditions d'existence

On représente $E_{\text{peff}}(r) = f(r)$; ici $K < 0$ (force centrale attractive, cf. gravité).

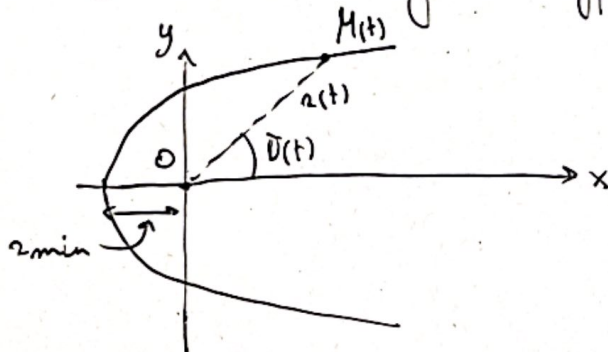


État de diffusion
 $\rightarrow r \in [r_{\min}, +\infty[$

Si $E_H > 0$: le seul mouvement possible s'effectue entre r_1 et $+\infty \rightarrow$ état de diffusion, ($E_H > E_{\text{peff}}$) état caractérisé par une distance minimale r_1 en dessous de laquelle le pt matériel ne peut aller.

NB : si $r < r_1$, la force n'est pas devenue répulsive, mais la partie énergie cinétique orbitale ($\frac{mC^2}{2r^2}$) de E_{peff} prend une valeur de + en + élevée à mesure de l'approche, ie quand $r \rightarrow r_1 \rightarrow$ renvoie le pt matériel à l'infini (cf. constante gravitationnelle).

On arrive à une trajectoire hyperbolique (d'une force centrale attractive) :



État lié
 $\rightarrow r \in [r_{\min}, r_{\max}]$

Si $E_H < 0$: le mouvement est borné entre $r_{\min}$ et $r_{\max} \rightarrow$ état lié $\rightarrow$ mouvement elliptique. ($E_H < E_{\text{peff}}$) ou $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont solutions de $E_H \cdot r^2 - K r - \frac{mC^2}{2} = 0$

En effet, on avait $E_H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r} \Leftrightarrow E_H \cdot r^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2} + K \cdot r$

$\Leftrightarrow E_H \cdot r^2 - K \cdot r - \frac{mC^2}{2} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{r}^2$
 ↑ borné $\rightarrow \dot{r} = 0 \rightarrow E_H \cdot r^2 - K \cdot r - \frac{mC^2}{2} = 0$

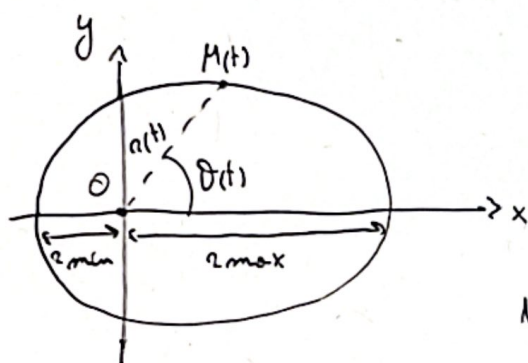
$$\Delta = b^2 - 4ac = K^2 + 4 \cdot E_H \cdot \frac{m C^2}{2} = K^2 + 2 E_H \cdot m C^2$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 + 2 E_H m C^2}}{2 E_H} \quad \text{avec } E_H < 0 \rightarrow \text{côt du } \sqrt{\Delta} : \\ |2 E_H m C^2| < K^2$$

$$\text{Si oui, } \sqrt{\Delta} < K \rightarrow r_{\min} : \frac{K - K'}{2 E_H} \\ \parallel \\ K'$$

$$\rightarrow r_{\max} : \frac{K + K'}{2 E_H}$$

$\rightarrow$ si $r_{\min} \neq r_{\max}$: la traj est une ellipse de demi grand axe $\frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ dont l'un des foyers est le centre attracteur O .



NB : si $\Delta = 0 \rightarrow$ sol double $r = r_0 \rightarrow$ traj. circulaire dont O est le centre.

Equation polaire de la trajectoire

On peut exprimer $r = f(\theta)$ les trajectoires exprimées ci-dessus... Non fait ici.

gravitation $\leftrightarrow$ attractive $\Leftrightarrow K < 0$: $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ avec $p = \left| \frac{m C^2}{K} \right|$

$\rightarrow$ eq polaire d'une conique, la valeur de l'excentricité e donne la forme de la conique.

$$e = \left| \frac{A \cdot m C^2}{K} \right| (A = \text{cté})$$

- $e = 0$: cercle de centre O de rayon p (état lié $r = r_0$)
- $0 < e < 1$: ellipse de foyer O (état lié, $r_{\min}$ et $r_{\max}$)
- $e = 1$: parabole (état de diffusion)
- $e > 1$: hyperbole (état de diffusion)

Énergie mécanique et trajectoires

Après manipulation: $E_M = -\frac{|K|}{2p} (1 - e^2) = \frac{K^2}{2mc^2} (e^2 - 1)$

→ comme E_M dépend de e , la valeur de E_M nous indique la nature de la traj:

• $e < 1 \Rightarrow E_M < 0$: traj elliptique (voire circulaire)

• $e = 1 \Rightarrow E_M = 0$: traj parabolique

• $e > 1 \Rightarrow E_M > 0$: traj hyperbolique

Études de trajectoires particulières

Trajectoire parabolique et vitesse de libération

Vitesse de libération: un corps soumis à l'attraction gravit d'un autre corps et distant de r a une vitesse suffisante pour s'échapper de cette attraction ($K < 0$)

NB: vitesse atteinte si le corps est dans un état de diffusion.

$$e = 1 \rightarrow E_M = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{2} m v_L^2 + \frac{K}{r} \Leftrightarrow v_L = \sqrt{-\frac{2K}{m r}}$$

Ex: Terre et satellite de masse m : $v_L = \sqrt{\frac{2 G m_T \cdot m}{m R_T}} = \sqrt{\frac{2 G m_T}{R_T}} \approx 11 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Trajectoire elliptique et lois de Kepler

NB: v_L = 2^{ème} vitesse cosmique

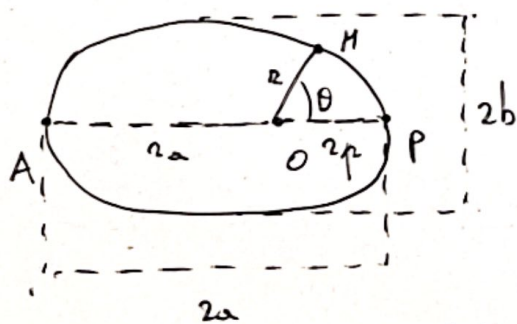
v_1 = 1^{ère} vitesse cosmique = orbite

circulaire, avec $v_L = \sqrt{2} \cdot v_1$

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta} \rightarrow \text{périgée: } r_p = \frac{p}{1 + e}$$

$$\Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{G m_T}{R_T}} \quad e)$$

$$\rightarrow \text{apogée: } r_a = \frac{p}{1 - e}$$



$$\text{Ici, } 2a = r_a + r_p \Leftrightarrow 2a = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e}$$

$$\Leftrightarrow 2a = \frac{2p}{1 - e^2}$$

$$\rightarrow p = a(1 - e^2)$$

$$\text{et } E_M = -\frac{|K|}{2p} (1 - e^2) \rightarrow E_M, \text{ici} = -\frac{|K| (1 - e^2)}{2a (1 - e^2)}$$

$$\Leftrightarrow E_M = -\frac{|K|}{2a} = \frac{K}{2a}, \text{ car } K < 0$$

→ dans une trajectoire elliptique, E_K ne dépend que du demi grand-axe de l'ellipse (et de K). De plus, $E_K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{K}{2} = \frac{K}{2a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = K \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{2K}{m} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{2} \right)} \text{ or } K = -G m_0 m \rightarrow v = \sqrt{-\frac{G m_0 m}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{G m_0 \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{G \cdot m_0 \left(\frac{2a - 2}{2a} \right)}$$

$$\rightarrow \text{périhélie : } v_p = \sqrt{G \cdot m_0 \left(\frac{2a - r_p}{a \cdot r_p} \right)} ; \text{ aphélie : } v_A = \sqrt{G m_0 \left(\frac{2a - r_A}{a \cdot r_A} \right)}$$

$$\rightarrow r_p < r_A \Leftrightarrow v_p > v_A$$

Troisième loi de Kepler

Rappel : 1^{ère} loi : loi des orbites : orbites elliptiques, le Soleil est au des foyers

Trajectoire du principe fondamental de la dynamique

2^{ème} loi : loi des aires : aires balayées par le segment Soleil - planète
 pendant des durées égales sont égales, et ne dépendent pas de la planète.

Conséquence de la conservation du moment cinétique.

3^{ème} loi : loi des périodes : la période T de révolution d'une planète
 et le demi grand-axe a de sa traj. elliptique
 sont reliés, t-à-q $\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$, où cte est indép.
 de la planète.

Application du principe fondamental de la dyn en coord cyl, sous l'hyp
 de la traj circulaire, et se généralise aux traj. elliptiques.

En particulier, $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_0}$ et, rappel : $A(t) = \frac{C}{2} \cdot t$ (loi des aires)

Sur T , K a balayé l'aire de l'ellipse, soit $A = \pi \cdot a \cdot b \rightarrow \pi a b = \frac{C \cdot T}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{T}{a} = \frac{2\pi b}{C} \text{ et, rappel : } p = a(1 - e^2) \Rightarrow p \cdot a = a^2(1 - e^2) = b^2$$

$$\text{avec } p = \frac{mC^2}{|K|} \rightarrow \frac{T}{a} = \frac{2\pi b}{C} \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2 b^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 p a}{\frac{p |K|}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{|K|} \text{ or } K = -Gm_0 \cdot m \rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{Gm_0 m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_0} \quad (\text{3ème loi de Kepler})$$

$G \cdot m_0$
= cste

NB: si traj circ, $a = r_0$