

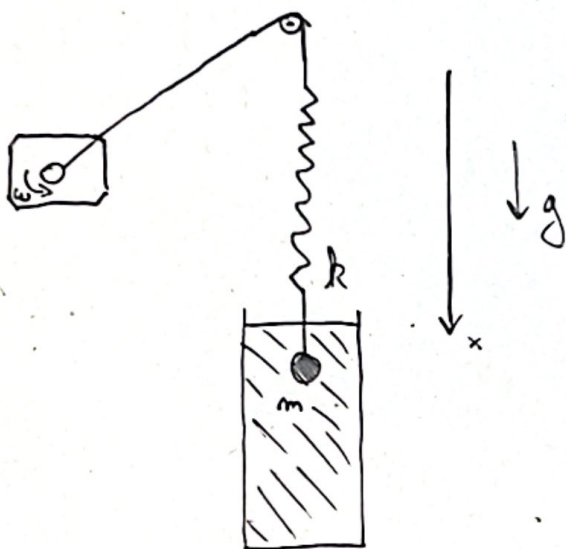
LP 24: Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Résonance $\leftrightarrow$ passage par un max (amplitude, en gén.) en réponse à une excitation, ici de type sinusoïdal à une pulsation donnée $\rightarrow$ on cherche les réponses du syst à cette excitation.
 NB: on reste dans les systèmes linéaires: excit. lin. $\rightarrow$ resp. lin., à même pulsation.
 $\rightarrow$ excitation v à $\omega \rightarrow$ syst. lin. $H(\omega) \rightarrow$ resp. v à ω .

Etude d'un système mécanique résonant

Etude en position

Soit, pour l'exemple, un oscillateur constitué par un pendule élastique vertical de masse m et de cote de raideur k dont l'extrémité supérieure a un mot oscil. harmonique de pulsation ω , entraîné par un moteur, et plongé dans un liquide qui impose un frottement de coeff α .



On introduit la force de frottement de Stokes

$F_s = \alpha \cdot v$, prop. à la vitesse v , et on écrit le principe fondam. de la dyn. sur l'axe vertical: Δl : élong.

$$m\ddot{x} = m\vec{g} - \alpha \vec{v} - k(x - x_0 - l_0)\vec{e}_x$$

avec x_0 position de l'extrémité sup. du ressort.

$$\text{et } x_0 = D_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$\rightarrow m\ddot{x} = -k(x - l_0) - \alpha \dot{x} + mg + k D_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$\text{On introduit } l_e = l_0 + \frac{mg}{k} \rightarrow m\ddot{x} = -kx + k(l_0 + \frac{mg}{k}) - \alpha \dot{x} + k D_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$= -k(x - l_e) - \alpha \dot{x} + k D_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$\text{on pose } X = x - l_e \rightarrow m\ddot{X} + \alpha \dot{X} + kX = k D_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$\text{ou } \ddot{X} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{k}{m} D_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

On a $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre, et le facteur de qualité $Q = \frac{m \omega_0}{\alpha}$

$$\rightarrow \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 D_m \cos(\omega t + \varphi_e) \quad \begin{matrix} \text{Eq. canonique} \\ \text{de l'osc. harm. amorti} \end{matrix}$$

$$= \frac{\sqrt{k m}}{\alpha}$$

avec $A_m = \omega_0^2 D_m$, l'amplitude du terme d'excitation

On a l'éq. homo: $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Leftrightarrow$ on pose $x = e^{\lambda t}$

$$\rightarrow \lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q} \lambda + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{Q^2} > 4 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2} \rightarrow 2$ solutions réelles:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2} \rightarrow x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} ; \text{régime aperiodique}$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{Q^2} = 4 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2} \rightarrow 1$ solution unique: $\lambda = \frac{-\omega_0}{2Q}$

$$\rightarrow x(t) = (At + B) e^{\lambda t} ; \text{régime critique}$$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2} \rightarrow 2$ solutions complexes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0 \sqrt{(-1) \left(4 - \frac{1}{Q^2} \right)}}{2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm i \omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}}{2}$$

$$\text{ou } \lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i \cdot \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{ou } [\omega_0] = s^{-1} \text{ et } [Q] = /$$

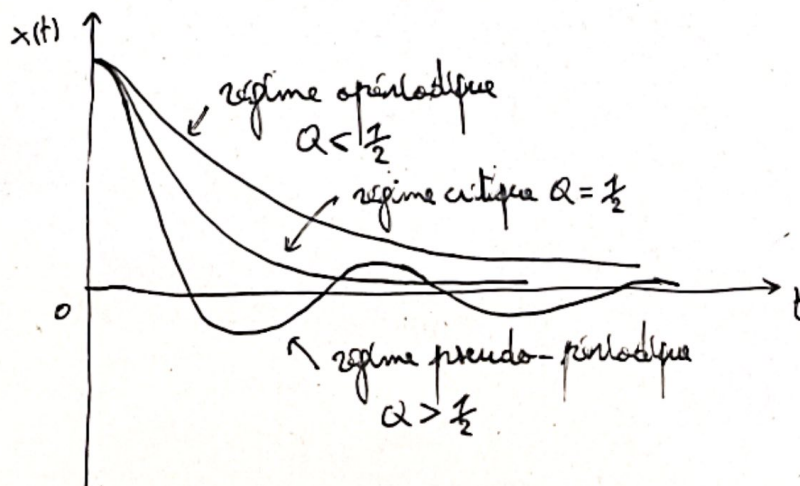
pseudo période $\nearrow$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{\tau} \mp i \omega \quad \text{avec } e^{i\omega t} = (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \text{ et on pose } \omega = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\text{et } x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} \text{ et, en développant: } x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t))$$

qui est le régime pseudo-périodique

Avec les CI $\rightarrow$ on obtient les courbes suivantes:



Ainsi, l'équation homogène amène à trois cas de figure en fct de la valeur de α ; les sol. de l'éq. homo correspondent au régime transitoire, qui disparaît/s'atténue au bout d'un certain temps, d'autant plus court que τ est petit.

Pensé ce délai, ne se manifestent que l'éventuelle solution particulière de l'éq diff. ($\frac{k}{m} D_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$) qui s'exprime comme un régime sinusoïdal de pulsation ω_0 ; on parle de régime forcé.

NB: Ici, dans la suite, on suppose que le régime transitoire est complètement éliminé et que seul persiste le régime forcé, de forme générale $x(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t)$

avec $t \gg \tau$

→ on remplace $x(t)$ par la S.P. dans l'éq diff pour en déduire les valeurs de a_1 et a_2 .

Ainsi, $\ddot{x} + \frac{c\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 D_m \cos(\omega_0 t)$ NB: $\varphi_2 = 0$ s'écrit:

$$\dot{x} = -a_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + a_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x} = -a_1 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - a_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\rightarrow -a_1 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - a_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + \frac{c\omega_0}{Q} (-a_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + a_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t))$$

$$+ \omega_0^2 (a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t)) = \omega_0^2 D_m \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{On regroupe: } \cos(\omega_0 t) \left(a_1 (\omega_0^2 - \omega_0^2) + a_2 \frac{\omega_0 \omega_0}{Q} \right) + \sin(\omega_0 t) \left(a_2 (\omega_0^2 - \omega_0^2) - a_1 \frac{\omega_0 \omega_0}{Q} \right) = \omega_0^2 D_m \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 (\omega_0^2 - \omega^2) + a_2 \frac{\omega_0 \omega}{Q} = \omega_0^2 D_m \\ a_2 (\omega_0^2 - \omega^2) - a_1 \frac{\omega_0 \omega}{Q} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{a_1 \omega_0^2 \omega^2}{Q^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} = \omega_0^2 D_m \\ a_2 = \frac{a_1 \omega_0 \omega}{Q (\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{v_0}{v}$$

On pose $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$ la freq réduite, c'est la freq. rapportée à la freq. propre.

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 \omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{a_1 \omega^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2} = \omega_0^2 D_m \\ a_2 = \frac{a_1 \omega_0 \omega}{Q \omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1-\mu^2) + a_1 \frac{\mu^2}{(1-\mu^2)Q^2} = D_m \Leftrightarrow a_1 Q^2(1-\mu^2)^2 + a_1 \mu^2 = D_m Q^2(1-\mu^2) \\ a_2 = \frac{a_1 \mu}{(1-\mu^2)Q} \end{cases} \quad \Leftrightarrow a_1 = D_m \frac{Q^2(1-\mu^2)}{Q^2(1-\mu^2)^2 + \mu^2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = D_m \frac{1-\mu^2}{(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2}$$

$$\rightarrow a_2 = D_m \frac{1-\mu^2}{(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2} \cdot \frac{\mu}{(1-\mu^2)Q} \Leftrightarrow a_2 = D_m \frac{\left(\frac{\mu}{Q}\right)}{(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2}$$

NB: en gén., on préfère écrire les sol. harm. sous la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$. Et,

$$a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi), \text{ avec } \begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \tan \varphi = -\frac{a_2}{a_1} \end{cases}$$

Démo: plan avec Pythagore p. 47.

$$\rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \begin{cases} A = \frac{D_m}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{\mu}{Q(\mu^2 - 1)} \end{cases}$$

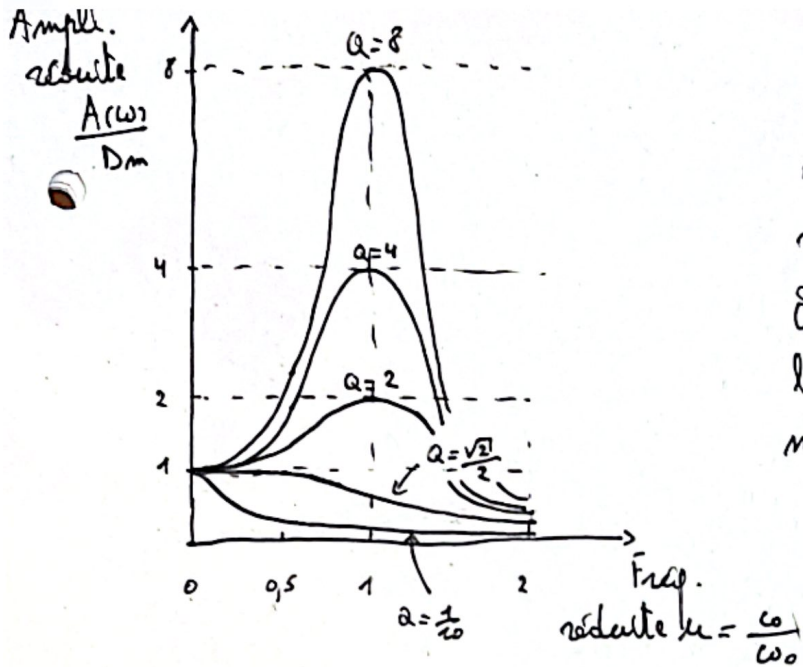
Démo:

$$\text{En effet, } a_1^2 + a_2^2 = D_m^2 \frac{(1-\mu^2)^2}{\left[(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2\right]^2} + D_m^2 \frac{\frac{\mu^2}{Q^2}}{\left[(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{D_m^2}{\left[(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2\right]^2} \left((1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2 \right) = \frac{D_m^2}{(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{D_m}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + \left(\frac{\mu}{Q}\right)^2}} \quad \text{OK}$$

NB: donc, l'amplitude A comme la phase φ varient avec μ , et donc ω , la freq. de l'excitation!



On peut représenter l'amplitude des oscillations en fct de la freq. pour $\neq$ valeurs du facteur de qualité.

On constate que si Q suffisamment grand, l'amplitude des oscillations passe par un max en $\omega = \omega_0 \rightarrow \omega = 1$
 $\rightarrow$ résonance en elongation.

On peut montrer qu'il n'y a résonance $\rightarrow$ maximum que si $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
on cherche en dérivant A en fct de ω pour la freq de résonance $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$;

NB: si $Q > 5 \rightarrow \omega_r \approx \omega_0$

que l'amplitude des oscillations à la freq propre ω_0 vaut $Q \cdot D_m$, d'où le phénomène d'ampli. d'elongation avec un ressort de grand facteur de qualité ;

que lorsque $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'amplitude des oscillations vaut D_m sur une grande bande de fréquences ($\approx$ base freq), ce qui confère au ressort un comportement $\approx$ type rigide.

Applications

Amplification par le fact de quali des oscillations d'elongation à la freq. de résonance $\rightarrow$ peut être à l'origine d'effets néfastes (ex: destructions suite à un séisme).

NB: peut aussi être recherchée pour construire des appareils de mesure sensibles (ex: sismographe).

NB: la rep. en freq. d'un oscillateur permet d'accéder à la raideur k de l'oscillateur, via

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{k \cdot m}}{\alpha} \dots \rightarrow \text{dans le cas d'une liaison chimique, p ex,}$$

la rep. freq d'une liaison p/a à une onde EM permet de remonter aux caract. de cette liaison $\rightarrow$ sa nature (ex: spectro IR).

Etude en vitesse

On sait que $x(t) = \frac{Dm}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (\frac{4}{Q})^2}} \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$

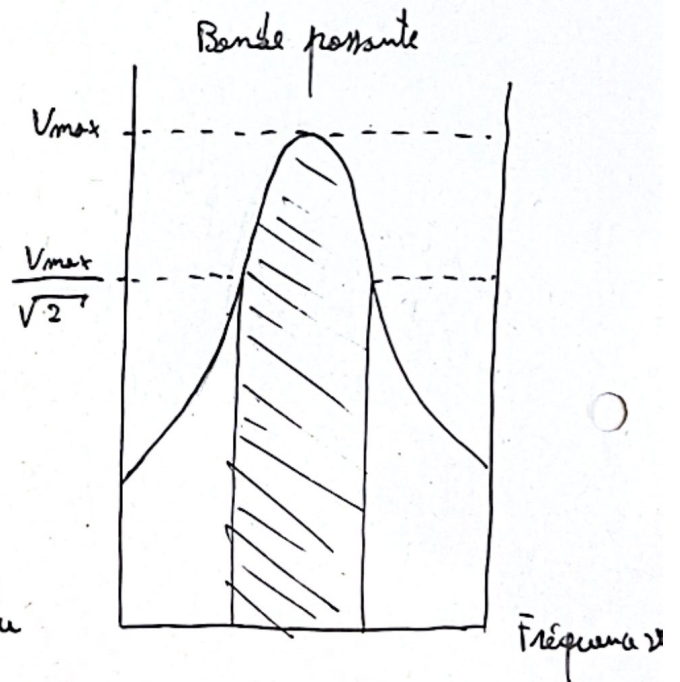
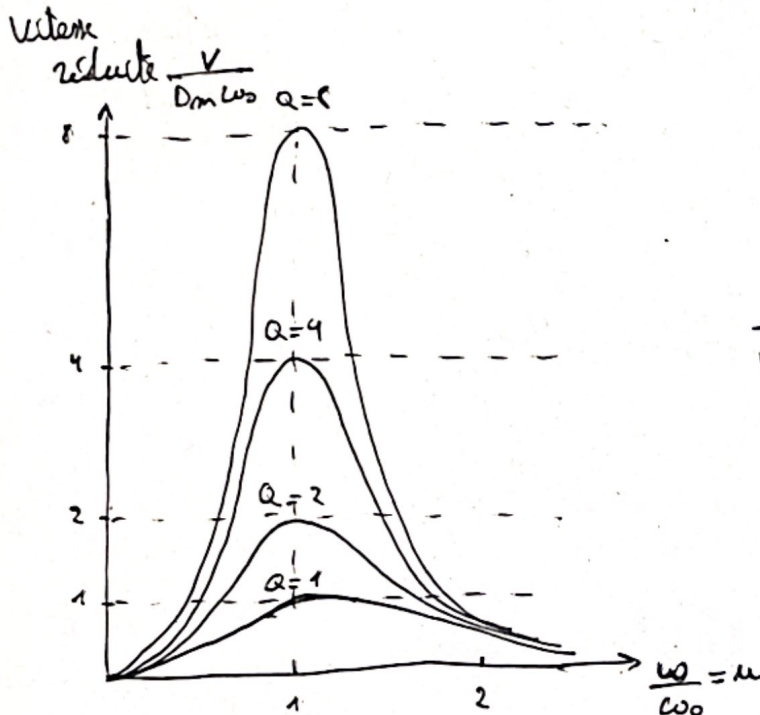
$\rightarrow \dot{x}(t) = v(t) = \frac{Dm\omega}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (\frac{4}{Q})^2}} (-1) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{Dm\omega}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (\frac{4}{Q})^2}} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

$\rightarrow$ la $v(t)$ est en quadrature de phase p/c au déplacement $x(t)$. L'amplitude de la vitesse

$$V = \frac{Dm\omega}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (\frac{4}{Q})^2}} = A \cdot \omega = \frac{DmQ\omega}{\sqrt{Q^2(1-\mu^2)^2 + \mu^2}} = \frac{DmQ\omega}{\mu \sqrt{Q^2 \frac{(1-\mu^2)^2}{\mu^2} + 1}}$$

$$\Leftrightarrow V = A \cdot \omega = \frac{DmQ\omega_0}{\sqrt{1 + [Q(\frac{1}{\mu} - \mu)]^2}}$$

$$\frac{(1-\mu^2)^2}{\mu^2} = \left(\frac{1-\mu^2}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mu} - \mu\right)^2$$



On voit que l'amplitude de la vitesse passe par un max : résonance en vitesse ; ce phénomène se produit à la fréq $\nu = \nu_0$, quelle que soit la valeur de Q .
la bande passante $\Delta\nu$ est définie comme l'intervalle de fréq t.p. $V \geq \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow$ on peut montrer que $\frac{\nu_0}{\Delta\nu} = Q \rightarrow$ la résonance est d'autant plus aigüe que Q est grand $\Leftrightarrow$ explique pq Q est appelé facteur d'acuité de la résonance.

NB: pour rappel, $\tau \approx \frac{Q}{\omega_0}$ et comme $\frac{v_0}{\Delta v} = Q$, on a: $\tau \cdot \omega_0 = \frac{v_0}{\Delta v}$

car $\Delta v = \frac{v_0}{\omega_0} \frac{1}{\tau}$. Or, $\omega_0 = 2\pi \nu_0 \rightarrow \Delta \nu = \frac{1}{2\pi\tau}$

→ on peut relier bande passante et temps de relaxation: un oscillateur qui possède une r.p. fréquentielle très sélective est aussi un oscillateur qui possède un grand temps de réponse/relaxation → sélectivité et inertie vont de paire.

Aspect énergétique

Pour entretenir les oscillations d'un oscillateur harm. amorti, il faut fournir de l'énergie, et ceci d'autant plus que les frottements sont importants.

la puissance fournie au syst. méca est $P = \int \vec{v}_c \cdot \vec{F} = \underbrace{k D_m \cos(\omega t)}_{\text{excitation}} \cdot \dot{x}(t)$

→ $P = k D_m \cos(\omega t) \cdot A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ d'expression de $\dot{x}(t)$

or $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) \rightarrow P = k D_m \omega x(t) \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = k D_m \omega x(t) \sin(\omega t)$

or $x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \rightarrow P = k D_m \omega (a_1 \sin(\omega t) \cos(\omega t) + a_2 \sin^2(\omega t))$ ok!

Rappel: $\sin(2\omega t) = 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rightarrow P = k D_m \omega (\frac{a_1}{2} \sin(2\omega t) + a_2 \sin^2(\omega t))$

→ la puissance fournie oscille à la pulsation 2ω autour de la valeur moy $\langle P \rangle$.

Or on sait que $\langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$ et $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \rightarrow \langle P \rangle = \frac{k D_m \omega}{2} \cdot a_2 > 0$

→ en moy, l'excitateur doit fournir de l'énergie à l'oscillateur pour entretenir les oscillations. car $a_2 > 0$

NB: $\langle P \rangle$ proportionnelle à $a_2 \Leftrightarrow$ représente l'amplitude des oscillations en quadrature de phase avec l'excitation.

On remplace par l'expression de $a_2 = D_m \frac{\frac{\mu}{Q}}{(1-\mu^2)^2 + (\frac{\mu}{Q})^2} \rightarrow \langle P \rangle = \frac{k D_m^2}{2} \frac{\frac{\mu \mu}{Q}}{(1-\mu^2)^2 + (\frac{\mu}{Q})^2}$

avec $\omega = \mu \cdot \omega_0$
 $\rightarrow \langle P \rangle = \frac{k D_m^2}{2} \frac{\omega_0 Q \frac{\mu^2}{Q^2}}{(1-\mu^2)^2 + (\frac{\mu}{Q})^2} = \frac{k D_m^2 \omega_0 Q}{2} \frac{1}{1 + [Q(\frac{1}{\mu} - \mu)]^2}$

or $V = D_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + [Q(\frac{1}{\mu} - \mu)]^2}} \rightarrow V^2 = D_m^2 \omega_0^2 Q^2 \frac{1}{1 + [Q(\frac{1}{\mu} - \mu)]^2}$

→ $\langle P \rangle = \frac{k}{2\omega_0 Q} V^2 \Leftrightarrow$ la puissance fournie est prop. au carré de l'amplitude de la résonance.

Et, pour rappel, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

→ on peut réécrire la puissance moy. $\langle P \rangle = \frac{k}{2\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{\sqrt{km}}{\alpha}} V^2 \Leftrightarrow \langle P \rangle = \frac{\alpha}{2} V^2$ (2)

Or, la puissance dissipée par les forces de frot. s'écrit $\langle P_{\text{dis}} \rangle = -\frac{\alpha}{2} V^2$

→ on écrit $\langle P_{\text{ext}} \rangle + \langle P_{\text{dis}} \rangle = 0 \rightarrow$ traduit que, en moy, l'excitateur doit fournir autant d'énergie pour compenser celle dissipée par les frottements.

Or $V = V(\omega) = Dm \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + [Q(\frac{\omega}{\omega_0} - 1)]^2}} \rightarrow$ on peut trouver une V_{max} , et donc une ω_m tq $V(\omega_m) = V_{\text{max}}$

On trouve $\langle P_{\text{ext}} \rangle_{\text{max}} = \frac{\alpha}{2} V_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} \alpha m Dm^2 \omega_0^3$ lorsque ω la freq. excit est égale à ω_0 .

Démo: comme $\alpha = \frac{m\omega_0}{Q} \rightarrow \langle P_{\text{ext}} \rangle_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{m\omega_0}{Q} V_{\text{max}}^2 \rightarrow V_{\text{max}}^2 = Q^2 Dm^2 \omega_0^2$
et $V_{\text{max}} = Q Dm \omega_0$ (unités ok)

Ensuite, on calcule l'E moy stockée par l'oscillateur, et on la compare à l'énergie dissipée sur une période. A la résonance, $\omega = \omega_0$, l'amplitude des oscillations $A = Q Dm$

→ E dis sur une période: $E_{\text{dis}} = \langle P_{\text{ext}} \rangle \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2} \alpha V^2 \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \alpha \frac{A^2 \omega_0^2}{\omega_0}$ $V = A \omega_0$

mais $\omega = \omega_0 \rightarrow E_{\text{dis}} = \pi \alpha A^2 \omega_0$;

et l'énergie méca. stockée sous forme d'E cin et Ep vaut, en moy, $\langle E_m \rangle = \frac{1}{2} k A^2$

→ rapport: $\frac{\langle E_m \rangle}{E_{\text{dis}}} = \frac{\frac{1}{2} k A^2}{\pi \alpha A^2 \omega_0} = \frac{k}{2\pi \alpha \omega_0}$; or $\alpha = \frac{m\omega_0}{Q}$ et $k = m\omega_0^2$

→ $\frac{\langle E_m \rangle}{E_{\text{dis}}} = \frac{m\omega_0^2}{2\pi \frac{m\omega_0}{Q} \omega_0} = \frac{Q}{2\pi}$

→ plus Q est grand, plus la part d'énergie stockée sous forme cin. et pot. est grande devant l'énergie dissipée par période → interprétation énergétique du facteur de qualité:

→ le facteur de qualité Q d'un système oscillant est 2π fois l'énergie moy. emmagasinée sous le syst. divisée par l'énergie dissipée par le système.

Lien avec l'oscillateur libre

Si l'on observe la réponse indicielle du système ie sa réponse à un échelon, on peut

● observer des oscillations libres amorties. La pulsation de ces oscillations, ou pseudo-pulsation, est justement ω_0 . Comme l'enveloppe des oscillations est une exponentielle décroissante en $e^{-\frac{t}{\tau}}$, on peut retrouver que Q est de l'ordre de grandeur du nbr d'oscillations visibles, ie au bout d'un temps τ , les oscillations sont suffisamment amorties pour être négligées.

quant à la réponse impulsionnelle (excitation de type Dirac), c'est la transformée de Fourier inverse de la fct de transfert du système.

→ on peut totalement caractériser un syst, et prévoir sa résonance, à pt son comportement

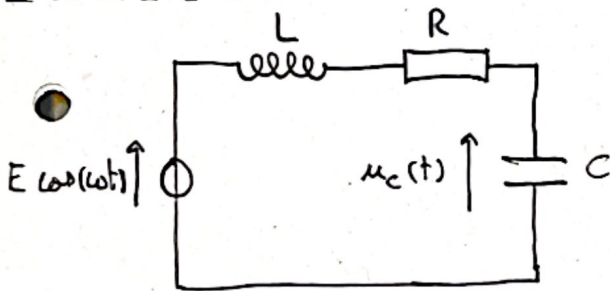
● en tant qu'oscillateur libre.

Généralisation

Analogie formelle entre mécanique et électrodynamique : la position x est l'équivalent de la charge q → toutes les grandeurs méca. classiques ont un équiv. électrodynamique
↔ compatibilité des équations.

Application au RLC en série

Etude de la tension aux bornes du condensateur



On établit l'éq. diff vérifiée par $u_C(t)$ à l'aide de la loi des mailles :

$$E' \cos(\omega t) = u_C + u_R + u_L$$

$$\text{avec } u_R = R \cdot i \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\text{et on rappelle } Q = C \cdot V \Leftrightarrow i = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow u_R = RC \frac{du_C}{dt} \text{ et } u_L = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

$$\rightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E' \cos(\omega t) \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = E \cdot \cos(\omega t)$$

$$\text{En not. complexe : } \underline{u_C}(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \underline{e}(t) = \frac{\frac{1}{iC\omega}}{\frac{1}{iC\omega} + iL\omega + R} \underline{e}(t)$$

$$\rightarrow \underline{u_C}(t) = \frac{e(t)}{1 - LC\omega^2 + iRC\omega}$$

L'amplitude de $u_c(t)$ est donnée par le module de l'amplitude complexe de $u_c(t)$:

$$\underline{U}_c = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + iRC\omega} \rightarrow U_c = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

et si on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, on obtient:

$$U_c = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \rightarrow \text{le sens de variation de } U_c \text{ est donné par celui de } f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

et $U_c = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, et $\sqrt{\quad}$ est une fct croissante $\rightarrow U_c$ varie de manière inverse à $f(x)$.

$$f'(x) = 2(1-x^2)(-2x) + 2\frac{x}{Q^2} = -4x + 4x^3 + \frac{2x}{Q^2} \rightarrow f'(x) = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

$$\text{et } f'(x) \text{ s'annule en } x=0 \text{ et } x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 2 \text{ cas : - petit fact. de qual : } Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{- grand fact. de qual : } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f'(x)$ ne s'annule que pour $x=0 \Leftrightarrow f(x)$ est croissante de $]0, +\infty[$

$\rightarrow U_c$ est décroissante sur $]0, +\infty[$

et ses limites sont $\lim_{x \rightarrow 0} U_c = E$

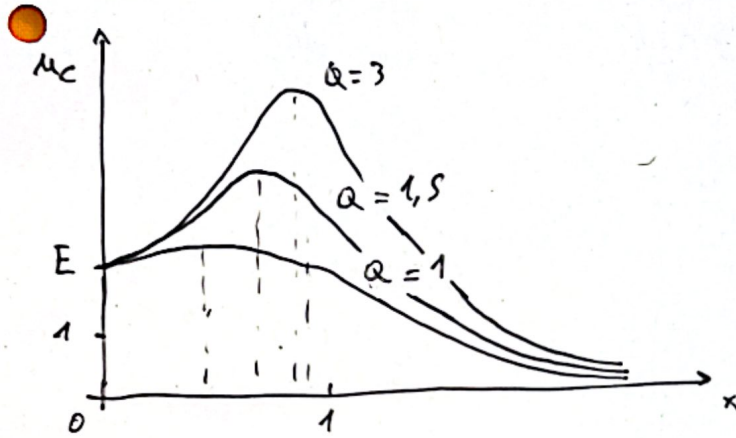
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U_c = 0$$

2. $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: deux racines pour $f'(x)$: $x=0$ et $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

x	0	$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$
U_c	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$$U_{\max} = \frac{2Q^2 E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

→ il y a un max d'amplitude pour $x = x_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \rightarrow$ Résonance en tension.
 → A la résonance, U_C est max et $U_C > E \rightarrow$ surtension



+ la résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand.

+ Plus Q est grand, plus ω tend vers ω_0 (pulsation propre) car $x = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 1$, en restant $\forall \omega < \omega_0$

+ la surtension est d'autant plus grande que Q est grand.

Etude en intensité

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} \rightarrow \underline{i} = \underline{i} C \omega \underline{u} \rightarrow \underline{i} = \underline{i} C \omega \frac{\underline{u}(t)}{1 - LC\omega^2 + iRC\omega}$$

$$\text{et } \underline{I} = \underline{i} C \omega \frac{E}{1 - LC\omega^2 + iRC\omega} \quad (\text{compl. complexe})$$

et en module : $I = \frac{EC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$ on divise par $RC\omega \rightarrow$ on pose x, Q

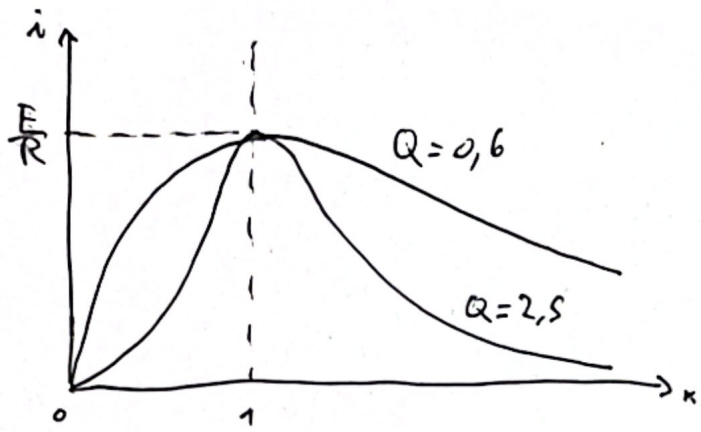
$$I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}, \text{ avec } f(x) = 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2.$$

$$\text{et } f'(x) = 2Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

+ $f(x) = 0$ en $x = 1 \rightarrow f(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$
 $\rightarrow f(x) > 0$ pour $x \in]1, +\infty[$

+ $f(x)$ décroissante entre 0 et 1, et croissante entre $]1, +\infty[$, et comme $\sqrt{\quad}$ est croissante et que $I(x)$ est invers. prop à $\sqrt{f(x)}$, donc $I(x)$ est croissante entre $]0, 1[$ et décroissante entre $]1, +\infty[$.

+ $I(x)$ admet un max en $x = 1$, avec $I_{\max} = I(1) = \frac{E}{R}$ (indépendant de Q)



Il y a donc 1 fs résonance en intensité quelle que soit la valeur de Q , pour $x=1 \Rightarrow \omega = \omega_0$ et $I_{\max} = \frac{E}{R}$ fs.

NB: oscillateurs: peuvent être couplés, et non-linéaires

Si n oscillateurs $\rightarrow \infty \rightarrow$ description ondulatoire

Ex: cavité Fabry-Pérot $\rightarrow Q \nearrow \rightarrow$ selecteur de freq $\rightarrow$ laser