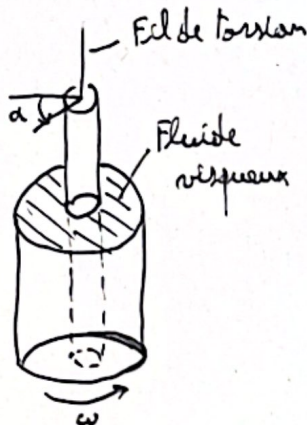


LP3: Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux

Fluides newtoniens

● Expérience de Couette



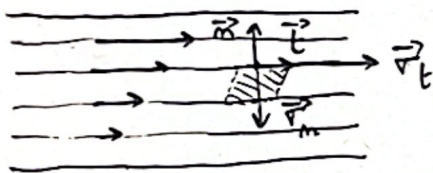
Soit un fluide contenu entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé via un fil de torsion. On constate que lorsque le cylindre extérieur est mis en rotation à la vitesse angulaire ω , le cyl. intérieur tourne d'un angle α p/r sa position d'équilibre.

→ la torsion du fil implique l'existence d'un couple dont les forces de pression ne peuvent être responsables → existence d'efforts tangentiels.

● NB: on observe que les particules de fluide adhèrent aux parois → existence d'un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.

NB: pour les fluides simples, l'angle α prop. à ω ↔ les efforts tangentiels augmentent proportionnellement au gradient de vitesse.

Interprétation



L'exp. montre que lors de l'écoulement du fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les observations exp. → introduction de forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide

● Les forces, de type forces de frottement, dues aux interactions entre les molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La contrainte (force par unité de surface) $\vec{T}$ qu'exerce une couche de fluide supérieure sur un élément de surface d'une couche de fluide inférieure s'écrit: $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \nabla_n \cdot \vec{n} + \vec{T}_t \vec{E}$, avec $\nabla_n = -p$

Fluide newtonien

Entre deux couches successives de fluide en écoulement. D à la vitesse $\vec{v}$, il y a des contraintes tot à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide. Par def., pour un fluide newtonien, les forces visqueuses sont prop. à la diff. de vitesse, c'est-à-dire au gradient de vitesse.

● Ainsi, $\nabla_t = \eta \frac{\partial v}{\partial n} = \eta \gamma$, où $\frac{\partial v}{\partial n}$ désigne le gradient de vitesse dans la dir. normale à la surface → la contrainte visqueuse varie comme la vitesse de cis. γ . η : cste de prop. caract. du fluide → viscosité dynamique.

Mesure de viscosité

Analogie dim. de la relation précédente: $[\eta] = \frac{[F][v]}{L^2 L} = \frac{N}{m^2} \cdot s = Pa \cdot s$

→ viscosité dyn. homogène à une pression x temps → Pa.s ou Poiseuille (Pl)

NB: viscosimètre → pour les liquides: → viscosimètre de Couette
→ viscosimètre à tube capillaire

Ordre de grandeur

Pour les liquides, la viscosité ↓ quand $T \uparrow$. Liquides purs: loi de type $\eta \propto e^{-\frac{b}{T}}$

Pour les gaz, la viscosité est plus difficile à mesurer. Détermination à l'aide de:

- mesure de vitesse: viscosimètre à bille roulante, viscosimètre à tube capillaire
- mesure de fréquence de résonance d'une onde de cisaillement: viscosimètre à cristal piézoélectrique de torsion

En effet, $\eta_{\text{gaz}} \ll \eta_{\text{liq}} \rightarrow$ difficile à mesurer. η_{gaz} dépend peu de la pression, et

$\eta_{\text{gaz}} \rightarrow$ avec T (légèrement), en général $\propto \sqrt{T}$.

Fluides non-newtoniens

Le comportement newtonien (de type $\sigma = \eta \dot{\gamma}$) s'observe:

- dans tous les gaz,
- dans les liquides simples à petites molécules (ex: H_2O),
- dans les solutions contenant des ions/molécules à symétrie sphérique.

NB: la rhéologie (étude du comportement des fluides en écoulement) montre qu'il y a des fluides tq la relation entre la contrainte σ_f et le cisaillement $\dot{\gamma}$ est plus complexe.

NB: $\eta_{H_2O} : 10^{-3} Pa \cdot s$ / $\eta_{\text{huile d'olive}} : 840 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$

$\eta_{H_2O, \text{vapeur}} : 10^{-5} Pa \cdot s$

Comportement non-linéaire

Certains fluides plus complexes vérifient la relation $\sigma_f = \eta(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}$

Lorsque $\eta(\dot{\gamma}) \downarrow$ avec $\dot{\gamma}$, le fluide coule d'autant plus facilement qu'il est cisailé → fluide rhéofluidifiant (ex: sang).

Lorsque $\eta(\dot{\gamma}) \uparrow$ avec $\dot{\gamma}$ → fluide rhéopaisissant (ex: eau + amidon)

+ ∃ fluides à seuil: ne coulent que si la contrainte σ_f dépasse une valeur seuil

Ex: peinture

Comportement visco-élastique

- Tout fluide est caract. par un tps de relaxation viscoélastique τ_{ve} $\rightarrow$ lorsque le fluide est soumis à une contrainte $\rightarrow$ 3 types de comportement fct tps d'observation:
- si $t \ll \tau_{ve}$: comportement élastique (déformation propr. à la contrainte)
 - si $t \gg \tau_{ve}$: comportement visqueux (vitesse de cisaillement propr. à la contrainte, soit $\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$)
 - si $t \approx \tau_{ve}$: comportement complexe $\rightarrow$ visco-élastique.

$\rightarrow$ liquide: fluide viscoélastique de faible τ_{ve} (ex: $H_2O \rightarrow \tau_{ve} \approx 10^{-9} s$)

$\rightarrow$ solide: fluide viscoélastique de grand τ_{ve} (ex: manteau terrestre $\rightarrow \tau_{ve} \approx 10^6$ ans)

NB: τ_{ve} fct de $T \rightarrow$ certains fluides ont un comportement fluide ou solide en fct de la temp. Ex: bitume.

Dynamique d'un écoulement visqueux

Si fluide newtonien et incompressible $\rightarrow$ eq de Newton appliquées aux particules du fluide $\rightarrow$ eq de Navier-Stokes

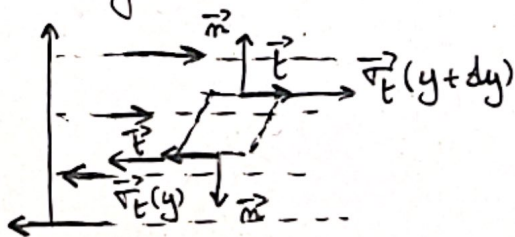
Bilan des forces

Ref galiléen; bilan des forces sur une particule de fluide située en M à l'instant t , de masse $dm = \rho(M, t) \cdot d\tau$

En plus des forces de pression et des forces ext volumiques, il faut ajouter les effets de la résultante des forces visqueuses:

$$d\vec{F} = (\vec{f}_{\text{ext}} - \nabla p) d\tau + d\vec{F}_\eta$$

Dans le cas d'un écoulement parallèle 1D, on calcule la rés. des forces visqueuses dans le cas d'un écoulement suivant Ox avec un gradient de vitesse suivant Oy , soit $\vec{v} = v(y) \cdot \vec{u}_x$.



$$\text{ici, } \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v(y) \vec{u}_x}{\partial x} \quad (\vec{v} \text{ n'a pas de composante en } \vec{u}_y \text{ et } \vec{u}_z)$$

$$\text{et comme } \vec{v} \text{ ne dépend que de } y, \frac{\partial v \vec{u}_x}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$$

$\rightarrow$ fluide incompressible

$\rightarrow$ rés. des forces visqueuses: $d\vec{F}_\eta = \eta \left[\frac{dv}{dy}(y+dy) - \frac{dv}{dy}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{dv}{dy^2} d\tau$
sur une part. de fluide

NB: on voit apparaître une force volumique qui s'exprime comme le laplacien de la vitesse $\rightarrow$ cette formule dans un cas part se généralise à tous les écoulements incompressibles des fluides newtoniens.

$\rightarrow$ on admet que pour un fluide newtonien incompressible: $d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$
avec Δ l'opérateur laplacien

Equation de Navier-Stokes

En appliquant la 2^{ème} loi de Newton à une particule de fluide, on a:

$$\mu d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p d\tau + \int_{V, ext} d\tau + d\vec{F}_\eta \quad \text{avec } d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

$$\text{Soit } \mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \int_{V, ext} + \eta \Delta \vec{v} \quad \text{NS pour fluide newtonien incompressible} \quad (1)$$

avec $\frac{Dx}{Dt} \leftarrow$ scalaire $= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ avec $\vec{v}(\vec{r}, t) = (v_x, v_y, v_z)$ en descript°
 $= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ eulerienne

$$\rightarrow \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + v_x \frac{\partial x}{\partial x} + v_y \frac{\partial x}{\partial y} + v_z \frac{\partial x}{\partial z} \quad \text{ou, en condensé,}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{opérateur advection}} x \rightarrow \text{pour } \vec{v} \text{ vectorielle: } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

NB: Eq NS est une EDP du 2nd ordre, non-linéaire

Conditions aux limites

Eq. NS de 2nd ordre $\rightarrow$ 2 vit d'intégration pour p et $\vec{v}$. On les détermine en appliquant les CL suivantes:

- continuité de la vitesse à travers une interface
- continuité de la contrainte normale, et donc de la pression
- continuité de la contrainte tangentielle

Le nombre de Reynolds

Complexité de l'Eq. de NS: non-linéarité du terme convectif, et du terme au 2nd ordre de la viscosité.

$\rightarrow$ pour simplifier, dans de nombreux cas, on peut négliger l'un des deux termes devant l'autre, par la déf. d'un facteur sans dimension qui estime l'importance du terme convectif devant le terme de viscosité.

NB: estimation de l'ordre de grandeur du terme convectif et du terme visqueux à pt échelle caract. D du problème, de la vitesse d'écoulement v , de la masse volumique ρ du fluide et de sa viscosité dyn. η

Ainsi, $\|\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\| \approx \rho \frac{v^2}{D}$ et $\|\eta \Delta \vec{v}\| \approx \eta \frac{v}{D^2}$

→ on définit le nombre de Reynolds sans dim $Re = \frac{\text{terme conv}}{\text{terme visq}} = \frac{\frac{\rho v^2}{D}}{\frac{\eta v}{D^2}} = \frac{\rho v D}{\eta}$

A petits Re , soit $Re \ll 1$, l'écoulement est laminaire, et essentiellement gouverné par la viscosité; le terme inertiel est négligeable et NS deviennent: $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \vec{J}_{v, ext} + \eta \Delta \vec{v}$

qui est linéaire en la vitesse.

NB: si l'écoulement est permanent → régime de Stokes

A grands Re , soit $Re \gg 1$, les effets visqueux sont concentrés sur les bords, dans la couche limite et dans le sillage des obstacles. Hors de ces zones, le terme visqueux est négligeable devant le terme inertiel → eq d'Euler: $\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{J}_{v, ext}$

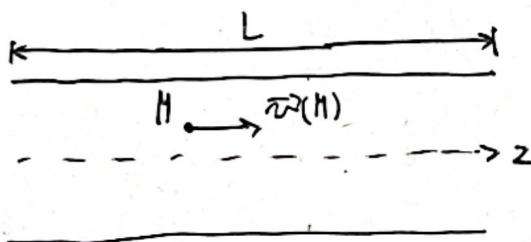
Écoulement turbulent

Viscosité: stabilise et régularise les écoulements → quand $Re \uparrow$, le régime laminaire devient instable, voire turbulent.

Règle gén: $Re > 10^5 \rightarrow$ turbulence → v en pt M varie erratiquement

→ pb insoluble analytiquement → lois phénom. et analyse dim.

Ex: loi de Poiseuille



On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube cyl de rayon R et de longueur $L \gg R$, tube horizontal suivant Ox et l'écoulement est assuré grâce à une Δp entre entrée et sortie du tube.

Hypothèses de travail: - écoulement permanent → $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

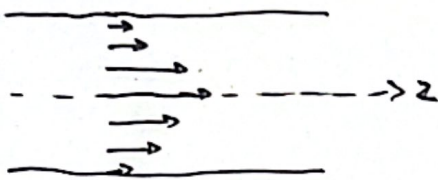
- écoulement incompressible → $\text{div } \vec{v} = 0$

- Reynolds petit ($Re < 2000$) → écoulement laminaire

- écoulement // à Ox et invariant par rotation autour de Ox

→ $\vec{v} = v(r, z) \vec{u}_x$

- On néglige la pesanteur: $\rho g R \ll \Delta p$



Calcul du débit volumique

NB: débit volumique: flux des vecteurs vitesse à travers une section de la canalisation

$$\rightarrow Q_v = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$\rightarrow Q_v = \frac{2\pi \Delta p}{4\eta L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi \Delta p}{2\eta L} \left(\frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L}$$

$$\rightarrow \Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q_v \quad \rightarrow \Delta p \propto \frac{1}{R^4} !$$

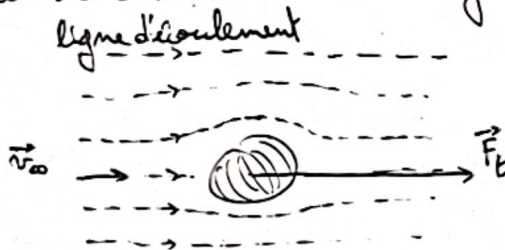
Trainée et portance

En omettant la poussée d'Archimède, la force que ressent un solide plongé dans un fluide en écoulement stationnaire 3D est nulle si ce fluide n'est pas visqueux.

Par contre, l'écoulement visqueux autour d'un obstacle solide produit une force qui présente deux composantes: - la composante dans le sens de l'écoulement: force de trainée
- la composante $\perp$ à l'écoulement: force de portance

Formule de Stokes

Idee: calcul de la force de trainée qu'un écoulement visqueux produit autour d'une sphère. On se place dans le cas où l'écoulement est gouverné par la viscosité $\Leftrightarrow Re$ petit.



Stokes obtient qu'une sphère de rayon r , immobile et soumise à un écoulement permanent incompressible et visqueux subit une force de trainée $\vec{F}_t$ prop. à la vitesse d'écoulement et au rayon de la sphère.

Loi de Stokes: $\vec{F}_t = 6\pi\eta r \cdot \vec{v}_\infty$ avec $\vec{v}_\infty$ la vitesse d'écoulement p/r à la sphère loin de la sphère.

Vitesse de sédimentation

Physique des suspensions (particules solides mélangées à un liquide) et des émulsions (gouttelettes liquides dispersées dans un autre liquide non miscible) → loi de Stokes, car le petit. liquide contenant de petites particules solides → décantation: les particules vont se déposer au fond du récipient avec une vitesse qui dépend de leur dim. caract.

→ tps de décantation $\propto$ inf sur la taille des grains.

En effet, les grains tombent à v est pour laquelle $P_{apparent} = P_{poids} - P_{poussée d'Archimède}$ compense la force de traînée, soit $6\pi\eta R v_{sed} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_s - \rho_f)g$

$$\Leftrightarrow v_{sed} = \frac{2g}{9\eta} (\rho_s - \rho_f) R^2 \quad [v_{sed}] = \frac{\frac{m}{s^2}}{\frac{kg}{m^2 \cdot s}} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot m^2$$

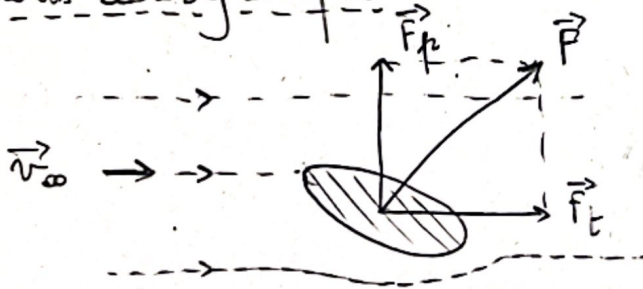
Δ manque "g" dans fiche Suet

$$= \frac{kg \cdot m^2}{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m^3} = \frac{m}{s} \quad OK$$

NB: cette force de traînée est liée: à un champ de pression plus important en avant de la bille
- aux forces visqueuses

NB: si on étudie la chute d'une bille sphérique dans un fluide visqueux au repos, loin de la bille il faut écrire: $\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v}$, avec $\vec{v}$: vitesse de la bille dans le ref. du labo
C'est opti: $v \propto \eta \uparrow (Re < 1)$

Coefficients aérodynamiques



La force qu'exerce un fluide en écoulement autour d'un obstacle se décompose en 2 composantes:

- Comp. // à $\vec{v}_{\infty}$: traînée $\vec{F}_T$
- Comp. $\perp$ à $\vec{v}_{\infty}$: portance $\vec{F}_P$

Ces deux forces s'expriment en utilisant la loi de Stokes, ce qui permet de définir deux coefficients de frottement: C_x (traînée) et C_z (portance).

Coefficient de traînée

Formule réécrite: $F_T = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 S \cdot C_x(Re)$, où S est une surf caract, Ici, en rayon r , πr^2 , $C_x = \frac{24}{Re}$ en ϕ en général la surf frontale projetée.

NB: si $Re \ll 1 \rightarrow C_x = \frac{12}{Re}$ et $F_T = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 S \cdot \frac{12}{Re}$ et $S = \pi R^2 \rightarrow F_T = 6\pi\eta R v_{\infty} \rightarrow$ Stokes

NB: à grand $Re \rightarrow$ turbulent $\rightarrow C_x(Re)$ est fct de la forme de l'objet.

Trainée $\rightarrow$ 3 termes: - trainée visqueuse $\rightarrow$ frottements du fluide sur l'obstacle

- trainée de pression $\rightarrow$ existence d'une dépression dans le sillage de l'obstacle quand la couche limite se décolle.

- trainée induite par la portance

la force de trainée que subit un véhicule (en l'air ou au sol) étant opposée à sa vitesse, elle dissipe de l'énergie $\rightarrow$ puissance dissipée $P = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^3$, avec v : la vitesse du véhicule.
 $\rightarrow$ min. de l'énergie dissipée, à haute vitesse, en jouant sur le produit $S \cdot C_x(Re)$.

Coefficient de portance

obstacle solide $\rightarrow$ formes équivalentes $\rightarrow$ pas de portance. Ex: cube, sphère.

Si non, influence du coeff de portance C_z qui dépend de la forme du solide et de l'écoulement, tq $F_p = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_z(Re)$

Ex: aile d'avion $\rightarrow C_z$ dépend: - de l'angle d'attaque $\alpha \rightarrow \alpha \uparrow \rightarrow$ portance $\uparrow$ jusqu'à un angle α_{max}

$\rightarrow \alpha > \alpha_{max}$: portance s'effondre $\rightarrow$ décrochage

- du profil de l'aile, notamment de sa cambrure.

Ainsi, une aile symétrique avec $\alpha = 0$ (corde $\parallel \vec{v}_\infty$) ne présente pas de portance, mais

une aile sym (ex: pale d'hélice) peut présenter une portance ($\rightarrow$ inclinaison).

NB: avion $\rightarrow$ on cherche à minimiser la trainée et augmenter la portance

$\rightarrow$ on cherche $\frac{C_z}{C_x} \max \rightarrow$ finesse de l'aile, max pour un certain α .